

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

© СКРЫПНИК И.В., ЖУРАВСКАЯ А.В.

Донецк, Киев, Украина

1. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в n -мерном евклидовом пространстве R^n , и предположим, что при $s = 1, 2, \dots$ определены непересекающиеся замкнутые множества $F_i^{(s)}$, $i = 1, \dots, I(s)$, содержащиеся в Ω . В цилиндрической области

$$Q_T^{(s)} = \Omega_s \times (0, T), \quad \Omega_s = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$$

рассматривается линейная параболическая задача

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{jk}(x, t) \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_j(x, t) u_s) + a(x, t) u_s = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T^{(s)}, \quad (1)$$

$$u_s(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T^{(s)} = \partial \Omega_s \times (0, T), \quad (2)$$

$$u_s(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega_s. \quad (3)$$

Предположение о нулевом начальном значении $u_s(x, t)$ не ограничивает общности рассмотрения, так как к условию (3) можно свести вычитанием решения вспомогательной задачи в $Q_T = \Omega \times (0, T)$, если $u_s(x, 0) \neq 0$.

Усреднение параболических задач в областях с мелкозернистыми границами изучалось в работах [5, 6]. В этих работах выяснены условия, при которых последовательность $u_s(x, t)$ решений задач (1)-(3) сходится при $s \rightarrow \infty$ к предельной функции и построена усредненная граничная задача. Эти построения связаны с изучением асимптотического разложения последовательности $u_s(x, t)$. При этом была доказана сильная сходимость остаточного члена асимптотического разложения в энергетической норме.

В данной работе проводится дальнейшее изучение поведения остаточного члена $w_s(x, t)$ асимптотического разложения и доказывается его равномерная сходимость к нулю при $s \rightarrow \infty$. Аналогичный результат для эллиптической задачи доказан в [2].

2. Будем предполагать, что функции $a_{jk}(x, t)$, $a_j(x, t)$, $a(x, t)$, $f(x, t)$, $g(x, t)$, $j, k = 1, \dots, n$ определены при $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, измеримы и удовлетворяют следующим условиям с положительными ν, μ_1, μ_2 :

$A_1)$ функции $a_{jk}(x, t)$ имеют обобщенные производные по x и удовлетворяют неравенствам с произвольным $\xi \in R^n$;

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x, t) \xi_j \xi_k \geq \nu |\xi|^2, \quad a_{jk}(x, t) = a_{kj}(x, t),$$

$$|a_{jk}(x, t)| \leq \mu_1, \quad \left| \frac{\partial a_{jk}(x, t)}{\partial x_i} \right| \leq \mu_1, \quad i = 1, \dots, n;$$
(4)

$A_2)$ выполнена оценка

$$\|F\|_{q,p,Q_T} + \|g\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \mu_2, \quad \frac{1}{p} + \frac{n}{2q} < 1,$$
(5)

где $F(x, t) = 1 + \sum_{j=1}^n a_j^2(x, t) + |a(x, t)| + |f(x, t)| + \left| \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \right|, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial t}$ – обобщенные производные функции $g(x, t)$ и $\|\cdot\|_{q,p,Q_T}$ – норма в $L_p(0, T; L_q(\Omega))$, $p, q > 1$.

Предполагаем условие регулярности границы $\partial\Omega$ области Ω в следующем слабом смысле

д) существуют положительные числа R_0, κ такие, что для произвольной точки $x_0 \in \partial\Omega$ выполнено неравенство

$$\text{mes} \{B(x_0, R) \setminus \Omega\} \geq \kappa R^n$$
(6)

при $0 < R \leq R_0$, где $B(x_0, R)$ – шар радиуса R с центром в точке x_0 .

Сформулируем условия на $F_i^{(s)}$, обеспечивающие построение усредненной задачи. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и определим точку $x_i^{(s)}$ так, чтобы $F_i^{(s)} \subset B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})$. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})$ до $\bigcup_{j \neq i} B(x_j^{(s)}, d_j^{(s)}) \cup \partial\Omega$.

Предполагаем, что выполнено условие:

$B_1)$ $\lim_{s \rightarrow \infty} r^{(s)} = 0$, где $r^{(s)} = \max \{r_i^{(s)}, i = 1, \dots, I(s)\}$;

$B_2)$ существует положительное число μ_3 такое, что $d_i^{(s)} \leq \mu_3 [r_i^{(s)}]^{\frac{n}{n-2}}$ при $i = 1, \dots, I(s), s = 1, 2, \dots$

Будем понимать под решение задачи (1)-(3) функцию

$$u(x, t) \in C([0, T], L_2(\Omega_s)) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega_s))$$

такую, что $u(x, t) - g(x, t) \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega_s))$, выполнено условие (3) и для произвольных функций $\psi(x, t) \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega_s))$, $h \in (0, T)$, выполнено интегральное тождество

$$\iint_{Q_T^{(s)}} \left\{ \frac{\partial [u_s]_h}{\partial t} \psi + \sum_{j,k=1}^n \left[a_{jk} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right]_h \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n [a_j u_s]_h \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + [a u_s]_h \psi - [f]_h \psi \right\} dx dt = 0. \quad (7)$$

Здесь использовано обозначение

$$[\varphi(x, t)]_h = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(x, s) ds$$

для произвольной функции $\varphi(x, t)$.

Известно (см. [1]), что условия $A_1), A_2)$ обеспечивают разрешимость задачи (1)-(3), а также известны следующие оценки

$$\max \{ |u_s(x, t)| : (x, t) \in Q_T^{(s)} \} \leq M_0, \quad \left\| \frac{\partial u_s}{\partial x} \right\|_{L_2(Q_T^{(s)})} \leq M_1 \quad (8)$$

с постоянными M_0, M_1 , зависящими только от параметров n, ν, μ_1, μ_2 . В дальнейшем эти параметры, а также T, R_0, κ, μ_3 понимаются как известные. Продолжим $u_s(x, t)$ на Q_T , полагая ее равной $g(x, t)$ вне Q_T . Используя вторую оценку в (8) и, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем предполагать слабую сходимость $u_s(x, t)$ к $u_0(x, t)$ в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$. Доказывается [6], что $u_0(x, t) \in C([0, T], L_2(\Omega))$ и является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_j(x, t) u_0) + a(x, t) u_0 - \\ - c(x, t) [g - u_0] = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T \end{aligned} \quad (9)$$

$$u_0(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T \quad (10)$$

$$u_0(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (11)$$

Здесь $c(x, t)$ — неотрицательная функция, определяемая емкостными характеристиками множеств $F_i^{(s)}$ (см. [6]) и имеющая оценку $c(x, t) \leq C_0$ с постоянной C_0 , зависящей только от известных параметров.

Основную роль при изучении асимптотического поведения последовательности $\{u_s(x, t)\}$ играют функции $v_i^{(s)}(x, t)$, определяемые как решения вспомогательных задач. А именно, определяем $v_i^{(s)}(x, t)$ как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{jk}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_k} \right] = 0, \quad (x, t) \in \{\Omega \setminus F_i^{(s)}\} \times (0, T), \quad (12)$$

$$v(x, t) = \omega \left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}} \right), \quad (x, t) \in \partial(\Omega \setminus F_i^{(s)}) \times (0, T), \quad (13)$$

$$v(x, t) = 0, \quad x \in \Omega \setminus F_i^{(s)}, \quad (14)$$

где $\omega : R^1 \rightarrow R^1$ — фиксированная бесконечно дифференцируемая функция, равная единице на $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, нулю на $[1, \infty)$ и такая, что $0 \leq \omega(z) \leq 1$ при $z \in R^1$.

Введем еще функции $\varphi_i^{(s)}(x)$ равенством

$$\varphi_i^{(s)}(x) = \omega\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2\rho_i^{(s)}}\right), \quad \rho_i^{(s)} = \max\left\{[r_i^{(s)}]^{\frac{n}{n-1}}, d_i^{(s)}\right\}.$$

В силу условий $B_1), B_2)$ при достаточно большом s имеем

$$4d_i^{(s)} \leq \rho_i^{(s)} \leq \frac{r_i^{(s)}}{4}, \quad i = 1, \dots, I(s). \quad (15)$$

Поэтому, не ограничивая общности, можем считать выполненными условия (15) при $s \geq 1$.

Определим асимптотическое разложение

$$u_s(x, t) = u_0(x, t) + [g(x, t) - u_0(x, t)]r_s(x, t) + w_s(x, t), \quad (16)$$

где

$$r_s(x, t) = \sum_{i=1}^{I(s)} v_i^{(s)}(x, t) \varphi_i^{(s)}(x). \quad (17)$$

Предполагаем функции $r_s(x, t)$ и $w_s(x, t)$ продолженными на Q_T , доопределяя их значениями один и нуль соответственно на множестве $\left\{\bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}\right\} \times (0, T)$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия $A_1, A_2), B_1), B_2)$. Тогда последовательность $w_s(x, t)$ стремится к нулю в $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$.*

Доказательство проводится аналогично [5].

Отметим только, что разложение (16), а, следовательно, и остаточный член разложения $w_s(x, t)$ отличны от соответствующих выражений в [5], что обусловлено линейностью рассматриваемой задачи, а также иным выбором последовательности $\rho_i^{(s)}$.

Основной результат статьи дает следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия $A_1, A_2), B_1), B_2), \partial)$. Тогда*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{vrai \max[|w_s(x, t)| : (x, t) \in Q_T]\} = 0, \quad (18)$$

где $w_s(x, t)$ – остаточный член разложения (16).

Сходимость (18) доказывается методом Мозера в разделе 4. Ему предшествуют вспомогательные оценки, полученные в разделе 3.

3. Вначале отметим ключевые поточечные оценки функции $v_i^{(s)}(x, t)$ ее производных по x .

Лемма 1. Предположим, что выполнены условия $A_1)$ и $B(x_i^{(s)}, 2d_i^{(s)}) \subset \Omega$. Тогда существует постоянная M_2 , зависящая только от ν, μ_1 такая, что при $x \in \Omega \setminus B(x_i^{(s)}, 2d_i^{(s)})$ выполнены оценки

$$|v_i^{(s)}(x, t)| \leq \min \left\{ M_2 \left(\frac{d_i^{(s)}}{|x - x_i^{(s)}|} \right)^{n-2}, 1 \right\}, \quad (19)$$

$$\left| \frac{\partial v_i^{(s)}(x, t)}{\partial x} \right| \leq M_2 \frac{1}{|x - x_i^{(s)}|} \left(\frac{d_i^{(s)}}{|x - x_i^{(s)}|} \right)^{n-2}. \quad (20)$$

Оценка (19) доказана в [3], и отметим только, что для ее доказательства предположение о дифференцируемости $a_{jk}(x, t)$ не нужно. Оценка (20) доказана в [4].

Определим бесконечно дифференцируемую функцию $\eta : [0, T] \rightarrow [0, 1]$, равную единице при $t \in [0, \frac{T}{2}]$, нулю при $t = T$.

Лемма 2. Предположим, что выполнены условия $A_1)$. Тогда существует постоянная M_3 , зависящая лишь от известных параметров такая, что при произвольном $r \geq 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r+1} \text{vrai max}_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} |w_s(x, \tau)|^{r+2} \eta^{r+2} dx + \\ & + (r+1) \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt \leq M_3(r+1) \iint_{Q_T} F(x, t) |w_s|^r \eta^{r+1}(t) dx dt + \\ & + M_3(r+1) \iint_{Q_T} \left\{ \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 + \sum_{i=1}^{I(s)} \left[|v_i^{(s)}|^2 \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right| \right] |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt + \right. \\ & \left. + \frac{M_3}{r+1} \sum_{i=1}^{I(s)} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 [\varphi_i^{(s)}]^2 |w_s|^{r+2} \eta^{r+2}(t) dx dt \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Непосредственно из обозначения

$$w_s^{(h)}(x, t) = [u_s(x, t)]_h - [u_0(x, t)]_h - [g(x, t) - u_0(x, t)]_h [r_s(x, t)]_h, \quad (22)$$

следует включение $w_s^{(h)}(x, t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_s))$, что дает возможность выбрать пробной функцией в (7)

$$\psi_1(x, t) = |w_s^{(h)}(x, t)|^r w_s^{(h)}(x, t) \eta^{r+2}(t) \chi_\tau(t), \quad r \geq 0. \quad (23)$$

Здесь $r_s(x, t)$ — функция, определенная равенством (17), $\chi_\tau(t)$ — характеристическая функция интервала $(0, \tau)$, $\tau \leq T$.

Получаем после указанной подстановки следующее равенство

$$R_1^{(s)}(h) + R_2^{(s)}(h) + R_3^{(s)}(h) = 0, \quad (24)$$

где

$$R_1^{(s)}(h) = \iint_{Q_\tau} \left\{ \frac{\partial w_s^{(h)}}{\partial t} \psi_1 + \sum_{j,k=1}^n \left[a_{jk} \frac{\partial w_s}{\partial x_j} \right]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n [a_j w_s]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + [a w_s]_h \psi_1 \right\} dx dt,$$

$$R_2^{(s)}(h) = \iint_{Q_\tau} \left\{ \frac{\partial [u_0]_h}{\partial t} \psi_1 + \sum_{j,k=1}^n \left[a_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n [a_j u_0]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + [a u_0]_h \psi_1 - [f]_h \psi_1 \right\} dx dt,$$

$$R_3^{(s)}(h) = \iint_{Q_\tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} ([g - u_0]_h [r_s]_h) \psi_1 + \sum_{j,k=1}^n \left[a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} ([g - u_0]_h [r_s]_h) \right]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n [a_j (g - u_0) r_s]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + [a (g - u_0) r_s]_h \psi_1 \right\} dx dt.$$

Преобразуем выражения для $R_l^{(s)}(h)$, $l = 1, 2, 3$ и оценим их пределы при $h \rightarrow 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \iint_{Q_\tau} \frac{\partial w_s^{(h)}}{\partial t} \psi_1 dx dt &= \frac{1}{r+2} \int_{\Omega_s} |w_s^{(h)}(x, \tau)|^{r+2} \eta^{r+2}(\tau) dx - \\ &- \iint_{Q_\tau} [w_s^{(h)}(x, t)]^{r+2} \eta^{r+1}(t) \frac{d\eta(t)}{dt} dx dt, \end{aligned}$$

где $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$. Используя это равенство, переходя к пределу в $R_1^{(s)}(h)$ при $h \rightarrow 0$ и оценивая в силу условия A_1), получим

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} R_1^{(s)}(h) &\geq \frac{1}{r+2} \int_{\Omega} |w_s(x, \tau)|^{r+2} \eta^{r+2}(\tau) dx + \\ &+ \nu(r+1) \iint_{Q_\tau} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2} dx dt - C_1(r+1) \iint_{Q_\tau} F(x, t) |w_s|^{r+2} \eta^{r+2} dx dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь и дальше обозначаем через C_j , $j = 1, 2, \dots$ постоянные, зависящие только от известных параметров.

Используя интегральное тождество для $u_0(x, t)$, как решения задачи (9)-(11), имеем равенство

$$R_2^{(s)}(h) = \iint_{Q_\tau} [c(x, t) (g(x, t) - u_0(x, t))]_h \psi_1(x, t) dx dt,$$

из которого следует оценка

$$\lim_{h \rightarrow 0} R_2^{(s)}(h) \geq -C_2 \iint_{Q_\tau} |w_s(x, t)|^{r+1} \eta^{r+2}(t) dx dt. \quad (26)$$

Преобразуем далее слагаемое из $R_3^{(s)}(h)$, содержащее производную по t , используя интегральные тождества для u_0 и $v_i^{(s)}$,

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} ([g - u_0]_h [r_s]_h) \psi_1(x, t) dx dt = \\
& = \iint_{Q_T} \left\{ \frac{\partial [g]_h}{\partial t} [r_s]_h \psi_1 + \sum_{j,k=1}^n \left[a_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right]_h \frac{\partial}{\partial x_k} ([r_s]_h \psi_1) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^n [a_j u_0]_h \frac{\partial}{\partial x_j} ([r_s]_h \psi_1) + [a u_0]_h [r_s]_h \psi_1 - [c(g - u_0)]_h [r_s]_h \psi_1 - \\
& \left. - [f]_h [r_s]_h \psi_1 \right\} dx dt - \sum_{i=1}^{I(s)} \sum_{j,k=1}^n \iint_{Q_T} \left[a_{j,k} \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} \right]_h \frac{\partial}{\partial x_k} ([g - u_0]_h \varphi_i^{(s)} \psi_1) dx dt.
\end{aligned} \tag{27}$$

Используя (27), можно перейти к пределу при $h \rightarrow 0$ в $R_3^{(s)}(h)$ и получить

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} R_3^{(s)}(h) &= \iint_{Q_T} \left\{ \frac{\partial g}{\partial t} r_s \psi_1 + \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \left[\frac{\partial (g r_s)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} - \right. \right. \\
& - u_0 \frac{\partial r_s}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \left. \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial r_s}{\partial x_k} \psi_1 \right] + \sum_{j=1}^n a_j \left[g r_s \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + u_0 \frac{\partial r_s}{\partial x_j} \psi_1 \right] + \\
& + [a g - c(g - u_0) - f] r_s \psi_1 \left. \right\} dx dt - \\
& - \sum_{i=1}^{I(s)} \sum_{j,k=1}^n \iint_{Q_T} a_{jk} \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} ([g - u_0] \varphi_i^{(s)} \psi_1) dx dt.
\end{aligned} \tag{28}$$

Преобразуем последний интеграл, используя определение $r_s(x, t)$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{I(s)} \sum_{j,k=1}^n \iint_{Q_T} a_{jk} \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} ([g - u_0] \varphi_i^{(s)} \psi_1) dx dt = \\
& = \sum_{j,k=1}^n \iint_{Q_T} a_{jk} \left[\frac{\partial (g r_s)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} - u_0 \frac{\partial r_s}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} \right] dx dt + \\
& + \sum_{i=1}^{I(s)} \sum_{j,k=1}^n \iint_{Q_T} a_{jk} \left\{ \frac{\partial (g \varphi_i^{(s)})}{\partial x_k} \left[\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} \psi_1 - v_i^{(s)} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\partial (u_0 \varphi_i^{(s)})}{\partial x_k} \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} \psi_1 + u_0 v_i^{(s)} \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} \right\} dx dt.
\end{aligned} \tag{29}$$

Отметим, что в силу (16) выполнена оценка

$$|r_s(x, t)| \leq 1, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (30)$$

Используя условие A_1) неравенства (29), (30) и Юнга, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} R_3^{(s)}(h) &\geq -\frac{\nu}{2}(r+1) \iint_{Q_T} |w_s|^r \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 \eta^{r+2}(t) dx dt - \\ &- C_3(r+1) \iint_{Q_T} \left\{ F(x, t) + \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 + \sum_{i=1}^{I(s)} \left[|v_i^{(s)}|^2 \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right| \right] \right\} |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt - \\ &- C_3 \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{I(s)} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 [\varphi_i^{(s)}]^2 |w_s|^{r+2} \eta^{r+2}(t) dx dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь неравенство (21) следует из (24), (25), (26), (31) и доказательство леммы 2 закончено.

Лемма 3. Предположим, что выполнены условия A_1), ∂). Тогда существуют положительные постоянные λ, M_4 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при произвольном $r \geq 4$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt &\leq M_4 r^\lambda \iint_{Q_T} F(x, t) |w_s|^{r-4} \eta^{r+1}(t) dx dt + \\ &+ M_4 \frac{1}{r^3} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^{r-4} \eta^{r+2}(t) dx dt + \\ &+ M_4 \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^{I(s)} \iint_{Q_T} \left\{ |v_i^{(s)}|^2 \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 |w_s|^{r-4} + \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 [\varphi_i^{(s)}]^2 |w_s|^{r+2} \right\} \eta^{r+2}(t) dx dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Доказательство. Пусть (x', t') — произвольная точка цилиндра Q_T и обозначим при $\delta > 0$

$$u'_0 = u_0(x', t'), \quad \omega'_\delta(x, t) = \omega\left(\frac{|x - x'|^2 + |t - t'|}{\delta^2}\right),$$

где ω — та же функция, что и при определении $\varphi_i^{(s)}(x, t)$. Подставим в интегральное тождество, соответствующее решению $u_0(x, t)$ задачи (9)-(11), пробную функцию

$$\psi_2(x, t) = [u_0(x, t) - u'_0]_h |w_s^{(h)}(x, t)|^r \omega'_\delta(x, t) \eta^{r+2}(t),$$

где $w_s^{(h)}(x, t)$ определено равенством (22).

Преобразуем слагаемое, возникающее после подстановки функции $\psi_2(x, t)$ и содержащее производную по t ,

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \frac{\partial[u_0]_h}{\partial t} \psi_2(x, t) dx dt &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_0(x, t) - u'_0]_h^2 |w_s^{(h)}(x, t)|^r \omega'_\delta(x, t) \eta^{r+2}(t) dx \Big|_{t=0}^{t=T} - \\ &- \frac{1}{2} \iint_{Q_T} [u_0(x, t) - u'_0]_h^2 \left\{ r [w_s^{(h)}(x, t)]^{r-1} \left\{ \frac{\partial[u_s]_h}{\partial t} - \frac{\partial[u_0]_h}{\partial t} - \right. \right. \\ &- \sum_{i=1}^{I(s)} \left(\frac{\partial[v_i^{(s)}]_h}{\partial t} [g - u_0]_h + [v_i^{(s)}]_h \frac{\partial}{\partial t} [g - u_0]_h \right) \varphi_i^{(s)} \Big\} \omega'_\delta(x, t) \eta^{r+2}(t) + \\ &+ [w_s^{(h)}(x, t)]^r \left((r+2) \eta^{r+1}(t) \omega'_\delta(x, t) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \omega'_\delta(x, t)}{\partial t} \eta^{r+2}(t) \right) \Big\} dx dt. \end{aligned} \quad (33)$$

Для дальнейшего преобразования слагаемых под знаком последнего интеграла воспользуемся интегральными тождествами для функции $u_s(x, t)$, $u_0(x, t)$, $v_i^{(s)}(x, t)$, как решений соответствующих начально-граничных задач. В результате проведения этих преобразований, последующих переходов к пределу при $h \rightarrow 0$ и оценивания получаем неравенство

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \omega'_\delta(x, t) \eta^{r+2}(t) dx dt &\leq \\ &\leq C_4 r \iint_{Q_T} \left\{ F(x, t) \omega'_\delta(x, t) + \left\{ \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 + |w_s|^4 \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 + \right. \right. \\ &+ \sum_{i=1}^{I(s)} \left[|v_i^{(s)}|^2 \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 + |w_s|^6 \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 |\varphi_i^{(s)}|^2 \right] \eta^{r+2}(t) + \eta^{r+1} \Big\} \omega'_\delta(x, t) + \\ &+ \left[\left| \frac{\partial \omega'_\delta(x, t)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \omega'_\delta(x, t)}{\partial t} \right| \right] \eta^{r+2}(t) \Big\} |u(x, t) - u'_0| \Big\} |w_s|^{r-4} dx dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Хорошо известно (см. [1]), что из условий $A_1), A_2)$ и ограниченности функции $c(x, t)$ следует гильдеровость решения $u_0(x, t)$ задачи (9)-(11), так что с некоторыми α, H , зависящими лишь от известных параметров, выполнена оценка

$$|u(x, t) - u'_0| \leq H \delta^\alpha \quad \text{при} \quad |x - x'|^2 + |t - t'| \leq \delta^2.$$

По заданному числу δ можем выбрать конечное число точек $\{(x_l, t_l)\}$, $l = 1, \dots, L$ так, чтобы $(x_l, t_l) \in Q_T$ и для функций $\omega_\delta^{(l)}(x, t) = \omega\left(\frac{|x - x_l|^2 + |t - t_l|}{\delta^2}\right)$ выполнялись условия

$$\sum_{l=1}^L \omega_\delta^{(l)}(x, t) \geq 1 \quad \text{при} \quad (x, t) \in Q_T, \quad \sum_{l=1}^L \text{mes } Q_\delta^{(l)} \leq C_5,$$

где $Q_\delta^{(l)}$ – носитель функции $\omega_\delta^{(l)}(x, t)$.

Применяя неравенство (34) при $\omega_\delta^{(l)}(x, t) = \omega_\delta^{(l)}(x, t)$, $l = 1, \dots, L$ и суммируя полученные оценки, получаем

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt &\leq C_6 r \delta^\alpha \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt + \\ &+ C_6 \frac{r}{\delta^2} \iint_{Q_T} F(x, t) |w_s|^{r-4} \eta^{r+1}(t) dx dt + C_6 r \delta^\alpha \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^{r-4} \eta^{r+2}(t) dx dt + \\ &+ C_6 r \delta^\alpha \sum_{i=1}^{I(s)} \iint_{Q_T} \left\{ |v_i^{(s)}|^2 \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 |w_s|^{r-4} + \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 |\varphi_i^{(s)}|^2 |w_s|^{r+2} \right\} \eta^{r+2}(t) dx dt. \end{aligned}$$

Выбирая теперь δ из условия $C_6 \delta^\alpha = \frac{1}{r^4}$, получаем неравенство (32) из последней оценки, что и заканчивает доказательство леммы 3.

Лемма 4. *Предположим, что выполнено условие A_1). Тогда существует положительная постоянная M_5 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что при произвольных $r = 0, s = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, I(s)$ выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 |w_s|^{r+2} |\varphi_i^{(s)}|^2 \eta^{r+2}(t) dx dt &\leq \\ &\leq M_4(r+1)^2 \iint_{Q_T} \left\{ \left[\left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 \right] |\varphi_i^{(s)}|^2 + \right. \\ &+ \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right| + |v_i^{(s)}|^2 \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 \left. \right\} |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt + \\ &+ M_4(r+1)^2 \iint_{Q_T} F(x, t) |w_s|^r |\varphi_i^{(s)}|^2 \eta^{r+1}(t) dx dt. \end{aligned} \tag{35}$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество, определяющее $v_i^{(s)}(x, t)$ как решение задачи (12)-(14), пробную функцию

$$\psi_3(x, t) = [v_i^{(s)}(x, t)]_h |w_s^{(h)}(x, t)|^{r+2} [\varphi_i^{(s)}(x)]^2 \eta^{r+2}(t),$$

где использованы те же обозначения, что и в (23). Преобразовывая слагаемое,

содержащее производную $[v_i^{(s)}]_h$ по t , получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} [v_i^{(s)}(x, t)]_h^2 |w_s^{(h)}(x, t)|^{r+2} [\varphi_i^{(s)}(x)]^2 \eta^{r+2}(t) dx \Big|_{t=0}^{t=T} - \\
& - \frac{r+2}{2} \iint_{Q_T} [v_i^{(s)}]_h^2 [\varphi_i^{(s)}]^2 \left\{ |w_i^{(h)}|^r w_s^{(h)} \left[\frac{\partial [u_s]_h}{\partial t} - \frac{\partial [u_0]_h}{\partial t} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial [v_i^{(s)}]_h}{\partial t} [g - u_0]_h \varphi_i^{(s)} - [v_i^{(s)}]_h \frac{\partial}{\partial t} [g - u_0]_h \varphi_i^{(s)} \right] \eta^{r+2} + |\tilde{w}_s^{(h)}|^{r+2} \eta^{r+1} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} dx dt + \\
& + \sum_{j,k=1}^n \iint_{Q_T} \left[a_{jk} \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} \right]_h \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ [v_i^{(s)}]_h |w_s^{(h)}|^{r+2} |\varphi_i^{(h)}|^2 \right\} \eta^{r+2} dx dt.
\end{aligned} \tag{36}$$

Используя интегральное тождество для функций $u_s, u_0, v_i^{(s)}$, как решений соответствующих начально-граничных задач, произведем дальнейшее преобразование слагаемых в (36), содержащих производные по t , и получим с

$$\psi_4(x, t) = [v_i^{(s)}(x, t)]_h^2 |w_s^{(h)}(x, t)|^r |w_s^{(h)}(x, t)| [\varphi_i^{(s)}(x)]^2 \eta^{r+2}(t)$$

следующее равенство

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \left\{ \frac{\partial [u_s]_h}{\partial t} - \frac{\partial [u_0]_h}{\partial t} - \frac{\partial [v_i^{(s)}]_h}{\partial t} [g - u_0]_h \varphi_i^{(s)} + [v_i^{(s)}]_h \frac{\partial [u_0]_h}{\partial t} \varphi_i^{(s)} \right\} \psi_4(x, t) dx dt = \\
& = - \sum_{j,k=1}^n \iint_{Q_T} \left\{ \left(\left[a_{jk} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right]_h - \left[a_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right]_h - \left[a_{jk} \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} \right]_h [g - u_0]_h \varphi_i^{(s)} + \right. \right. \\
& + \left[a_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right]_h [v_i^{(s)}]_h \varphi_i^{(s)} \Big) \frac{\partial \psi_4}{\partial x_k} - \left(\left[a_{jk} \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} \right]_h \frac{\partial}{\partial x_k} ([g - u_0]_h \varphi_i^{(s)}) - \right. \\
& \left. - \left[a_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right]_h \frac{\partial [v_i^{(s)}]_h}{\partial x_k} \varphi_i^{(s)} \Big) \psi_4 \right\} dx dt - \iint_{Q_T} \left\{ \sum_{j=1}^n ([a_j u_s]_h - [a_j u_0]_h) \frac{\partial \psi_4}{\partial x_j} + \right. \\
& + \sum_{j=1}^n [a_j u_0]_h \frac{\partial}{\partial x_j} ([v_i^{(s)}]_h \varphi_i^{(s)} \psi_4) + ([a u_s]_h - [a u_0]_h + [a u_0]_h [v_i^{(s)}]_h \varphi_i^{(s)} - \\
& \left. - [f]_h [v_i^{(s)}]_h) \psi_4 + [c(g - u_0)]_h (1 - [v_i^{(s)}]_h \varphi_i^{(s)}) \psi_4 \right\} dx dt.
\end{aligned} \tag{37}$$

Подстановка (37) в (36) дает возможность совершить предельный переход при $h \rightarrow 0$. Приводя последующие оценки с использованием условия A_1) и неравенство

Юнга, получаем

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 |w_s|^{r+2} |\varphi_i^{(s)}|^2 \eta^{r+2}(t) dx dt \leq \\ & \leq C_7(r+1)^2 \iint_{Q_T} \left\{ \left[\left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 \right] |\varphi_i^{(s)}|^2 + \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right| + \right. \\ & \left. + |v_i^{(s)}|^2 \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 \right\} |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt + C_7(r+1)^2 \iint_{Q_T} F(x, t) |w_s|^r |\varphi_i^{(s)}|^2 \eta^{r+1}(t) dx dt. \end{aligned}$$

Этим закончено доказательство леммы 4.

Лемма 5. *Предположим, что выполнены условия $A_1), A_2), B_1), B_2)$. Тогда существует постоянная M_6 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что при произвольных $r \geq 2, s = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, I(s)$ выполнена оценка*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{I(s)} \iint_{Q_T} \left\{ |v_i^{(s)}|^2 \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right| \right\} |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt \leq \\ & \leq \frac{M_6}{r^2} \iint_{Q_T} \left\{ \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r + r^6 |w_s|^{r-2} \right\} \eta^{r+2}(t) dx dt. \end{aligned} \quad (38)$$

Доказательство. Используя определение функций $\varphi_i^{(s)}(x)$ и неравенства (19), (20), получаем оценку

$$|v_i^{(s)}| \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right| \leq C_8 [d_i^{(s)}]^{n-2} [\rho_i^{(s)}]^{1-n}.$$

Далее, в силу выбора $\rho_i^{(s)}$ в (15) и условия $B_2)$, имеем

$$|v_i^{(s)}| \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right| \leq C_9. \quad (39)$$

При дальнейшей оценке левой части неравенства (38) будет использоваться неравенство

$$\int_{B(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \leq C_{10} \left\{ \rho^p \int_{B(x_0, r)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx + \frac{\rho^n}{r^n} \int_{B(x_0, r)} |u(x)|^p dx \right\}, \quad (40)$$

справедливое при $1 \leq p < n$ для произвольной функции $u(x) \in W_p^1(B(x_0, r))$ с постоянной C_{10} , зависящей лишь от p, n . В (40) ρ, r — произвольные положительные числа, такие, что $0 < \rho < \frac{r}{2}$. Доказательство оценки (40) при $p > 1$

имеется в [7, лемма 1.4, гл.8]. В случае $p = 1$ оценка (40) может быть получена близкими к приведенным там рассуждениям.

Применяя оценку (20) и неравенство (40) при $p = 1$, $\rho = \rho_i^{(s)}$, $r = \frac{r_i^{(s)}}{2}$, имеем

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right| |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt &\leq C_{11} \frac{[d_i^{(s)}]^{n-2}}{[\rho_i^{(s)}]^n} \int_0^T \int_{B(x_i^{(s)}, \rho_i^{(s)})} |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt \leq \\ &\leq C_{12} \frac{[d_i^{(s)}]^{n-2}}{[\rho_i^{(s)}]^n} \left\{ r \rho_i^{(s)} \int_0^T \int_{B(x_i^{(s)}, \frac{r_i^{(s)}}{2})} |w_s|^{r-1} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right| \eta^{r+2}(t) dx dt + \right. \\ &+ \frac{[\rho_i^{(s)}]^n}{[r_i^{(s)}]^n} \int_0^T \int_{B(x_i^{(s)}, \frac{r_i^{(s)}}{2})} |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt \left. \right\} \leq C_{13} \int_0^T \int_{B(x_i^{(s)}, \frac{r_i^{(s)}}{2})} \left\{ \frac{1}{r^2} |w_s|^r \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 + \right. \\ &+ r^4 |w_s|^{r-2} \left. \right\} \eta^{r+2}(t) dx dt. \end{aligned} \quad (41)$$

Замечая, что в силу (16), шары $B(x_i^{(s)}, \frac{r_i^{(s)}}{2})$, $B(x_j^{(s)}, \frac{r_j^{(s)}}{2})$ не пересекаются при $i \neq j$, получаем оценку (38) непосредственно из (39), (41).

4. Доказательство теоремы 2. Из неравенств (21), (32), (34), (38) следует оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{r+1} \max_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} |w_s(x, \tau)|^{r+2} \eta^{r+2}(\tau) dx + (r+1) \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt &\leq \\ &\leq C_{14} (r+1)^{\lambda+1} \iint_{Q_T} F(x, t) |w_s|^{r-4} \eta^{r+1}(t) dx dt + \\ &+ C_{14} \frac{1}{r^2} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^{r-4} \eta^{r+2}(t) dx dt \end{aligned} \quad (42)$$

при $r \geq r^{(1)}$ с некоторым числом $r^{(1)}$, зависящим только от известных параметров.

Применяя неравенство Юнга, имеем из (42)

$$\begin{aligned} \text{vrai max}_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} |w_s(x, \tau)|^{r+2} \eta^{r+2}(\tau) dx + \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt &\leq \\ &\leq C_{15} (r+1)^{\lambda+2} \iint_{Q_T} F(x, t) |w_s|^{r-4} \eta^{r+1}(t) dx dt + \\ &+ \left(\frac{C_{15}}{r+1} \right)^{\frac{r}{2}-1} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 \eta^{r+2}(t) dx dt. \end{aligned} \quad (43)$$

Воспользовавшись условием $A_2)$ на функцию $F(x, t)$, получаем из (43) оценку

$$\begin{aligned} & \text{vrai max}_{0 < \tau < T} \int_{\Omega} |w_s(x, \tau)|^{r+2} \eta^{r+2}(\tau) dx + \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt \leq \\ & \leq C_{16}(r+2)^{\lambda+2} \left\{ \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} |w_s|^{(r-4)q'} \eta^{(r+1)q'}(t) dx \right\}^{\frac{p'}{q'}} dt \right\}^{\frac{1}{p'}} + \left(\frac{C_{16}}{r+1} \right)^{\frac{r}{2}-1} \gamma_s, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\gamma_s = \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty,$$

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad q' = \frac{q}{q-1} \quad \text{и} \quad r \geq r^{(1)}.$$

Неравенство (44) позволяет организовать итерационный процесс для оценки максимума $|w_s(x, t)|$. При этом еще используется ограниченность оператора вложения

$$L_\rho(0, T; L_\sigma(\Omega)) \subset L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega)) \quad (45)$$

при

$$\frac{2}{\sigma} + \frac{4}{\rho n} = 1.$$

Из вложения (45) и оценки (44) получаем при $\sigma = 2q'\delta$, $\rho = 2p'\delta$, $\delta = \frac{2}{np'} + \frac{1}{q'} > 1$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} |w_s(x, t)|^{r q'} \eta^{r q'}(t) dx \right\}^{\frac{p'}{q'}} dt = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} \left[|w_s(x, t)| \eta(t) \right]^{\frac{r}{2\delta}} dx \right\}^{\frac{p'}{\sigma}} dt \leq \\ & \leq C_{17}(r+1)^\rho \left\{ \text{vrai max}_{0 < t < T} \int_{\Omega} |w_s(x, t)| \eta(t)^{\frac{r}{2}} dx + \iint_{Q_T} |w_s(x, t)|^{\frac{r}{2}-2} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 \eta^{\frac{r}{2}}(t) dx dt \right\}^{\frac{p'}{2}} \leq \quad (46) \\ & \leq C_{18}(r+1)^{\rho+(\lambda+2)\frac{p'}{2}} \left\{ \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} [|w_s(x, t)| \eta(t)]^{(\frac{r}{2}-6)q'} dx \right\}^{\frac{p'}{q'}} dt \right\}^\delta + \left(\frac{C_{18}}{r+1} \right)^{\frac{rp'}{2}-2\rho} \gamma_s^{\frac{p'}{2}}. \end{aligned}$$

Определим числовую последовательность $\{r_j\}$

$$r_j = \left[r_0 + \frac{6\delta}{\delta-1} \right] \delta^j, \quad r_0 = r^{(1)} = 4\delta$$

и введем обозначение

$$J_s(j) = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} |w_s(x, t)|^{r_j q'} \eta^{r_j q'}(t) dx \right\}^{\frac{p'}{q'}} dt. \quad (47)$$

Из оценки (46) с $r = r_j$ имеем при $j \geq 1$

$$[J_s(j)]^{\delta^{-j}} \leq C_{19}^{\delta^{-j}} [J_s(j-1)]^{\delta^{-(j-1)}} + C_{19} \delta^{-j} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-j}}, \quad (48)$$

где $\tilde{\gamma}_s$ — сходящаяся к нулю последовательность, $0 < \tilde{\gamma}_s \leq 1$.

Итерируя неравенство (48), получаем оценку

$$[J_s(j)]^{\delta^{-j}} \leq C_{19}^{\delta^{-j} + (j-1)\delta^{-(j-1)} + \dots + \delta^{-1} + 1} \left\{ J_s(0) + \delta^{-j} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-j}} + \delta^{-(j-1)} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-(j-1)}} + \dots + \delta^{-1} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-1}} \right\}. \quad (49)$$

Далее, в силу неравенства $\delta > 1$, имеем

$$C_{19}^{\delta^{-j} + (j-1)\delta^{-(j-1)} + \dots + \delta^{-1} + 1} \leq C_{20}. \quad (50)$$

Для оценки фигурной скобки в (49) заметим, что

$$\int_j^{j+1} \delta^{-(z-1)} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-z}} dz \geq \delta^{-j} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-j}}.$$

Отсюда и дальнейшей замены $\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-z}} = \zeta$ следует оценка

$$\begin{aligned} \delta^{-j} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-j}} + \delta^{-(j-1)} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-(j-1)}} + \dots + \delta^{-1} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-1}} &\leq \\ &\leq C_{21} \int_1^\infty \delta^{-(z-1)} \tilde{\gamma}_s^{\delta^{-z}} dz \leq C_{22} \frac{1}{|\ln \tilde{\gamma}_s|}. \end{aligned} \quad (51)$$

Из неравенств (49)-(51) имеем

$$[J_s(j)]^{\delta^{-j}} \leq C_{23} \left[J_s(0) + \ln \frac{1}{|\tilde{\gamma}_s|} \right]. \quad (52)$$

Замечая, что, в силу теоремы 1, $J_s(0) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, получаем из (52)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \operatorname{vrai} \max |w_s(x, t)| : x \in \Omega, 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \right\} = 0. \quad (53)$$

Наконец, в силу возможности продолжения решения задачи (1)-(3) на цилиндр Q_{2T} , получаем (18) из непосредственно (53), и доказательство теоремы 2 закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А, Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.:Наука, 1967.
2. Скрыпник И.В., *Асимптотика решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях*, Мат. сборник, **184** (1993), вып.10, с.67-90.
3. Скрыпник И.В., *Поточечная оценка решений модельной нелинейной параболической задачи, Нелинейные граничные задачи*, (1991), No.3, с.72-86.
4. Журавская А.В., *Поточечная оценка решений нелинейной параболической задачи*, Праці Інституту математики НАНУ. Математика та її застосування. **36** (2001), с.103-110..
5. Скрыпник И.В., *Асимптотическое разложение решений квазилинейных параболических задач в перфорированных областях*, Укр. мат. журн., (1993),-т.45, No.11, с.1542-1566.
6. Скрыпник И.В., *Усреднение квазилинейных параболических задач в областях с мелкозернистой границей*, Диф. уравнения, (1995), т.31, No.2, с.350-363.
7. Скрыпник И.В., *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, М.:Наука, 1990.

Скрыпник И.В.

ИПММ НАН Украины , ул.Р.ЛЮКСЕМБУРГ 74,
83114, ДОНЕЦК, УКРАИНА

Журавская А.В.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАИНЫ, ул.ТЕРЕЩЕНКОВСКА,3,
01601, КИЕВ, УКРАИНА